Algebra

English

1. Prove that

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 124 & 412 & 561 \end{vmatrix}$$

without calculating the determinants.

2. Find the determinant of the $(n \times n)$ matrix $A = (a_{ij})$ defined by

$$a_{ij} = \frac{1}{\min(i, j)}.$$

3. Let A be a nilpotent $(n \times n)$ matrix.
Show that $I - A$ is nonsingular (invertible).

4. Show that the additive group $\mathbb{Z}$ is not isomorphic to the additive group $\mathbb{Q}$.

5. Let a be an element of a multiplicative groupe G.
If $|a| = 30$, how many left cosets of $\langle a^4 \rangle$ in $\langle a \rangle$ are there?

6. Let G be a finite group and H a subgroup of G such that $|H| > \dfrac{|G|}{2}$.
Prove that $G = H$.

7. Find all the integers $x \in \mathbb{Z}$ such that $(x - 3)$ divides $(x^3 - 19)$.

8. Let E be a finite dimensional vector space of dimension $n > 1$ and let $u : E \to E$ be a homomorphism such that $Rank(u) = 1$. Assume that $Image(u) \subseteq ker(u)$.
Prove that 0 is the only eigenvalue of u and that u is non-diagonalisable.

Marks [5], [6], [5], [6], [6], [5], [5], [7]

Français

1. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 124 & 412 & 561 \end{vmatrix}$$

   sans calculer les déterminants.

2. Calculer le déterminant de la matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n définie par

$$a_{ij} = \frac{1}{\min(i,j)}.$$

3. Soit A une matrice carrée nilpotente d'ordre n.
   Montrer que $I - A$ est inversible.

4. Montrer que le groupe additif $\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe au groupe additif $\mathbb{Q}$.

5. Soit a un élément d'un groupe multiplicatif G tel que $|\langle a \rangle| = 30$. Quel est le nombre de classes à gauche modulo $\langle a^4 \rangle$ dans $\langle a \rangle$?

6. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G tel que $|H| > \dfrac{|G|}{2}$.
   Montrer que $G = H$.

7. Chercher tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $(x - 3)$ divise $(x^3 - 19)$.

8. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n > 1$ et u un endomorphisme de E tel que $rg(u) = 1$. On suppose que $Im(u) \subseteq ker(u)$.
   Montrer que 0 est la seule valeur propre de u et que u n'est pas diagonalisable.

Barème [5], [6], [5], [6], [6], [5], [5], [7]

1. Prove that

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 124 & 412 & 561 \end{vmatrix}$$

without calculating the determinants.

$-------------------------------$

Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 124 & 412 & 561 \end{vmatrix}$$

sans calculer les déterminants.

2. Find the determinant of the $(n \times n)$ matrix $A = (a_{ij})$ defined by

$$a_{ij} = \frac{1}{\min(i, j)}.$$

– –

Calculer le déterminant de la matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n définie par

$$a_{ij} = \frac{1}{\min(i, j)}.$$

3. Let A be a nilpotent $(n \times n)$ matrix.
   Show that $I - A$ is nonsingular (invertible).

   $- -$

   Soit A une matrice carrée nilpotente d'ordre n.

   Montrer que $I - A$ est inversible.

4. Show that the additive group $\mathbb{Z}$ is not isomorphic to the additive group $\mathbb{Q}$.

– –

Montrer que le groupe additif $\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe au groupe additif $\mathbb{Q}$.

5. Let a be an element of a multiplicative groupe G.
If $|a| = 30$, how many left cosets of $\langle a^4 \rangle$ in $\langle a \rangle$ are there?

– –

Soit a un élément d'un groupe multiplicatif G tel que $|\langle a \rangle| = 30$. Quel est le nombre de classes à gauche modulo $\langle a^4 \rangle$ dans $\langle a \rangle$?

6. Let G be a finite group and H a subgroup of G such that $|H| > \dfrac{|G|}{2}$. Prove that $G = H$.

   −

   Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G tel que $|H| > \dfrac{|G|}{2}$. Montrer que $G = H$.

7. Find all the integers $x \in \mathbb{Z}$ such that $(x-3)$ divides (x^3-19).

$- -$

Chercher tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $(x-3)$ divise (x^3-19).

8. Let E be a finite dimensional vector space of dimension $n > 1$ and let $u : E \to E$ be a homomorphism such that $Rank(u) = 1$. Assume that $Image(u) \subseteq ker(u)$.
   Prove that 0 is the only eigenvalue of u and that u is non-diagonalisable.

   –

   Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n > 1$ et u un endomorphisme de E tel que $rg(u) = 1$. On suppose que $Im(u) \subseteq ker(u)$.
   Montrer que 0 est la seule valeur propre de u et que u n'est pas diagonalisable.

1 [**5 Points**]
Find the radius of convergence of the infinite series

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

---

1 [5 **Points**]
Trouver le rayon de convergence de la série suivante

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

2 [6 **Points**]
Evaluate

$$I = \int_0^a \frac{f(x)dx}{f(x) + f(a-x)}$$

---

2 [6 **Points**]
Évaluez

$$I = \int_0^a \frac{f(x)dx}{f(x) + f(a-x)}$$

3 [7 **Points**]

Set up the integral in spherical coordinates to find the volume of the region bounded below by $z = 0$, above by the cone $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ and laterally by the cylinder $x^2 + y^2 = 1$.

---

3 [7 **Points**]

Écrire l'intégrale en coordonnées sphériques du volume de la région limitée par le plan $z = 0$, par le cône $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$, et par le cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

4 [7 **Points**] Define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by:

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

Is f uniformly continuous on $\mathbb{R}$? Justify.

---

4 [7 **Points**]

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

Est ce que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$? Justifer.

5 [8 **Points**]
Assume that

(a) f continuous for $x \geq 0$.
(b) $f'(x)$ exists for $x > 0$.
(c) $f(0) = 0$.
(d) f' is increasing.

Consider $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ for $x > 0$. Prove that g is increasing. Hint: Use the Mean Value Theorem.

---

5 [8 **Points**]
Supposons que

(a) f est continue pour $x \geq 0$.
(b) $f'(x)$ existe pour $x > 0$.
(c) $f(0) = 0$.
(d) f' est croissante.

On définit une fonction g par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x > 0$. Montrez que g est une fonction croissante. Indication: Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire.

6 [6 **Points**]
Find

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{n+k}\right)^{1/n}$$

---

6 [6 **Points**]
Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{n+k}\right)^{1/n}$$

7 [6 **Points**]

Let $f(x) = \dfrac{\cos\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - 1}{(\ln x)^2}$ defined on $]0,1[\cup[1,+\infty[$.

Show that f can be extended to a continuous function $\tilde{f}$ defined on $]0,+\infty[$.

---

7 [6 **Points**]

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\cos\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - 1}{(\ln x)^2}$ définie sur $]0,1[\cup[1,+\infty[$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en une fonction $\tilde{f}$ définie sur $]0,+\infty[$.

1. What is the number of factors of 270,000?

2. In 1693, Samuel Pepys wrote Isaac Newton to ask which of the following three events is more likely:

   (A) Getting at least one 6 when a die is rolled six times.

   (B) Getting at least two 6 when a die is rolled twelve times.

   (C) Getting at least three 6 when a die is rolled eighteen times.

   What is the answer? (Pepys initially thought that (C) had the highest probability).

3. A drunkard removes two randomly chosen letters of the message "HAPPY HOUR" that is attached on a billboard in a pub. His drunk friend puts the two letters back in a random order. What is the probability that HAPPY HOUR appears again?

4. In how many ways can n boys and n girls sit around a table if they must alternate?

5. Show that a nonempty finite set has as many even sized subsets as odd ones.

MARKS : 1. [6] **2.** [6] **3.** [6] **4.** [6] **5.** [6]

– –

1. Quel est le nombre de diviseurs de 270,000?

2. En 1693, Samuel Pepys a écrit à Isaac Newton pour demander lequel des trois événements suivants est le plus probable:

   (A) Obtenir au moins un 6 quand un dé est lancé six fois.

   (B) Obtenir au moins deux 6 quand un dé est lancé douze fois.

   (C) Obtenir au moins trois 6 quand un dé est lancé dix-huit fois.

   Quelle est la réponse correcte? (Pepys pensait initialement que (C) est la bonne réponse).

3. Un ivrogne enlève deux lettres choisies au hasard du message "HAPPY HOUR" qui est attaché sur un panneau d'affichage dans un pub, son ami ivre remet les deux lettres dans un ordre aléatoire. Quelle est la probabilité que "HAPPY HOUR" réapparaisse?

4. De combien de façons peuvent n garcons et n filles s'assoir autour d'une table s'ils doivent s'alterner?

5. Démontrer qu'un ensemble fini non vide admet autant de sous-ensembles contenant un nombre pair d'éléments que de sous-ensembles contenant un nombre impair d'éléments.

BARÈME : 1. [6] **2.** [6] **3.** [6] **4.** [6] **5.** [6]

1. **(6 pts)** What is the number of factors of 270,000?

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

1. **(6 pts)** Quel est le nombre de diviseurs de 270,000?

2. **(6 pts)** In 1693, Samuel Pepys wrote Isaac Newton to ask which of the following three events is more likely:

   (A) Getting at least one 6 when a die is rolled six times.

   (B) Getting at least two 6 when a die is rolled twelve times.

   (C) Getting at least three 6 when a die is rolled eighteen times.

   What is the answer? (Pepys initially thought that (C) had the highest probability).

– –

2. **(6 pts)** En 1693, Samuel Pepys a écrit à Isaac Newton pour demander lequel des trois événements suivants est le plus probable:

   (A) Obtenir au moins un 6 quand un dé est lancé six fois.

   (B) Obtenir au moins deux 6 quand un dé est lancé douze fois.

   (C) Obtenir au moins trois 6 quand un dé est lancé dix-huit fois.

   Quelle est la réponse correcte? (Pepys pensait initialement que (C) est la bonne réponse).

3. **(6 pts)** A drunkard removes two randomly chosen letters of the message "HAPPY HOUR" that is attached on a billboard in a pub. His drunk friend puts the two letters back in a random order. What is the probability that HAPPY HOUR appears again?

– –

3. **(6 pts)** Un ivrogne enlève deux lettres choisies au hasard du message "HAPPY HOUR" qui est attaché sur un panneau d'affichage dans un pub, son ami ivre remet les deux lettres dans un ordre aléatoire. Quelle est la probabilité que "HAPPY HOUR" réapparaisse?

4. **(6 pts)** In how many ways can n boys and n girls sit around a table if they must alternate?

– –

4. **(6 pts)** De combien de façons peuvent n garcons et n filles s'assoir autour d'une table s'ils doivent s'alterner?

5. **(6 pts)** Show that a nonempty finite set has as many even sized subsets as odd ones.

– –

5. **(6 pts)** Démontrer qu'un ensemble fini non vide admet autant de sous-ensembles contenant un nombre pair d'éléments que de sous-ensembles contenant un nombre impair d'éléments.